Applications à la trigonométrie de la formule d'Euler

Formule d'Euler : $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

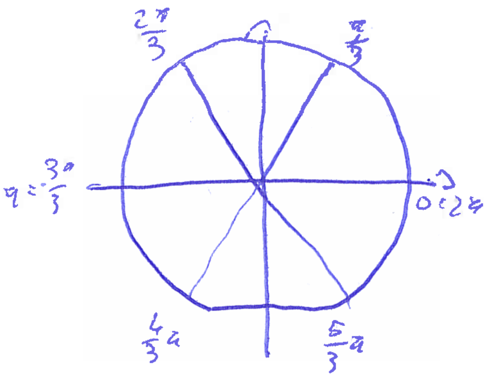
1) Formule de de Moivre :

Proposition : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} \quad (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin n\alpha$.

Preuve : $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha} = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$ $\square$

Exemple : $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{22} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{22} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{22} =$

$= e^{i\cdot\frac{22\pi}{3}} = \cos\left(\frac{22\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{22\pi}{3}\right)$.



$\frac{22\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 6\pi \equiv \frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

$\to \cos\left(\frac{22\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{22\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

2) Formules d'Euler

Proposition : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \qquad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

Preuve : si $z = x + iy \Rightarrow \operatorname{Re} z = x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ & $\operatorname{Im} z = y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

Formule d'Euler : $\cos\alpha = \operatorname{Re}(e^{i\alpha})$, $\sin\alpha = \operatorname{Im}(e^{i\alpha})$

$\Rightarrow \cos\alpha = \operatorname{Re} e^{i\alpha} = \frac{e^{i\alpha} + \overline{e^{i\alpha}}}{2} = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$. $\sin\alpha = \operatorname{Im} e^{i\alpha} = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$ $\square$

Exponentielle complexe

Définition: Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}$. L'exponentielle de z est définie comme

$$e^z = e^{x+iy} \left(= e^x \cdot e^{iy}\right) := e^x(\cos y + i \sin y)$$

Propriétés de l'exponentielle complexe:

1) Si $z \in \mathbb{R}$, $e^z = e^x$ coïncide avec l'exponentielle réelle.

2) $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$

Preuve ~~En effet~~. Si $z = x+iy$, $w = u+iv$.

$$e^{z+w} = e^{(x+iy)+(u+iv)} = e^{x+u+i(y+v)} = e^{x+u}\left(\cos(y+v) + i\sin(y+v)\right) =$$

$$= e^x \cdot e^u \cdot \left(\cos y \cos v - \sin y \sin v + i\left(\cos y \sin v + \sin y \cos v\right)\right)$$

$+i^2$

$$= e^x e^u \cdot (\cos y + i \sin y)(\cos v + i \sin v) = e^z \cdot e^w.$$

$\square$

3) ~~$\forall$~~ $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, on a $e^{nz} = (e^z)^n$

(Expliquer les preuves par réc.)

Preuve: si $n=0$: ~~$e^{0 \cdot z} = 1 = (e^z)^0$ par déf~~ On procède par recursion:

$$e^{0 \cdot z} = e^0 = 1 \quad ; \quad (e^z)^0 = \left(e^x(\cos y + i \sin y)\right)^0 = (e^x)^0 \cdot (\cos y + i \sin y)^0 = 1 \cdot 1 = 1.$$

$n=1$: $e^z = (e^z)^1$ est trivial.

Supposons que $e^{nz} = (e^z)^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer $e^{(n+1)z} = (e^z)^{n+1}$

$$e^{(n+1)z} = e^{nz+z} = e^{nz} \cdot e^z \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hypothèse} \\ \text{récursive}}}{=} (e^z)^n \cdot e^z = (e^z)^{n+1}.$$

Donc on a montré la formule $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si $n<0$, il suffit de montrer que $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.

Mais $1 = e^0 = e^{z-z} = e^z \cdot e^{-z}$, donc $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$. $\square$

Rmq : Comme $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, $e^z \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Rmq : $e = e^1 = 2{,}71828\ldots$ est un nombre réel positif, dit nombre de Euler (ou constante de Néper)

Il est déterminé par :

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad ; \quad e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Définition : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la <u>factorielle</u> de n comme

$n! := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ si $n > 0$.

$0! := 1$.

Exemples $0! = 1$ $\quad 1! = 1 \quad 2! = 2 \cdot 1 = 2 \quad 3! = 3 \cdot \underbrace{2 \cdot 1}_{2!} = 6$.

$4! = 4 \cdot \underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}_{3!} = 24$. $\ldots$ $n! = n \cdot (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Coefficient binomial.

Définition : Soient $0 \leq k \leq n$ des entiers.

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ (k parmi n) est le nombre

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \cancel{\frac{n(n-1)\ldots 2 \cdot 1}{k(k-1)\ldots 1 (n-k)\ldots 1}} \quad \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}.$$

Parfois, $\binom{n}{k}$ est noté aussi C_n^k. On verra que $\binom{n}{k}$ est le nombre des parties de cardinalité k dans $\{1, \ldots, n\}$.

Exemple $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$.

Propriétés du coefficient binomial.

- $\binom{n}{0} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$; $\quad \binom{n}{0} = \frac{\cancel{n!}}{0!\,\cancel{n!}} = \frac{1}{0!} = 1$.

$\shortparallel$

$\binom{n}{n}$

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \forall\, 0 \leq k \leq n.$

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,\underbrace{(n-(n-k))}_{k}!}$$

Proposition: $\forall\ 1 \leq k \leq n$, on a

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Preuve: $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right)$

$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(\frac{\cancel{k} + n - \cancel{k} + 1}{(n-k+1)\,k}\right) = \frac{(n+1)\,n!}{k\,(k-1)!\cdot(n-k+1)(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}.$ □

Le "triangle de Pascal" est construit comme suit.

$n=0$	$\binom{0}{0}$ ($k=0$, $k=1$)	1
$n=1$	$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$ ($k=2$)	1 1
$n=2$	$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$	1 2 1
$n=3$	$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$	1 3 3 1
		1 4 6 4 1
n	$\binom{n}{0}\ \binom{n}{1} \cdots \binom{n}{k-1}\ \binom{n}{k} \cdots \binom{n}{n}$	1 5 10 10 5 1
$n+1$	$\binom{n+1}{0} \cdots \binom{n+1}{k} \cdots \binom{n+1}{n+1}$	1 6 15 20 15 6 1
		1 7 21 35 35 21 7 1
		⋮

La formule du binôme de Newton.

Théorème : Soit $z, w \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$. Alors.

$$(*) \quad (z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}$$

Preuve : Par récurrence sur n.

$n=0$: $(z+w)^0 = 1. = \binom{0}{0} z^0 w^0 = 1$ ok.

Supposons que $(*)$ vaut pour n. On veut le montrer pour $n+1$.

$$(z+w)^{n+1} = (z+w)(z+w)^n = (z+w) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{\overset{h}{k+1}} w^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k+1} =$$

$$= \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} z^h w^{n-h+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k+1} =$$

$$= \underbrace{\binom{n}{n}}_{= 1 = \binom{n+1}{n+1}} z^{n+1} \cancel{w^0} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{= 1 = \binom{n+1}{0}} \cancel{z^0} w^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right]}_{\overset{(\text{Prop } 2)}{=} \binom{n+1}{k}} z^k w^{n-k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} z^k w^{n+1-k}. \qquad \square$$

Exemple :

$(z+w)^0 = 1.$

$(z+w)^1 = z + w$

$(z+w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$

$(z+w)^3 = z^3 + 3z^2w + 3zw^2 + w^3$

z

C2-6

$(z+w)^4 = z^4 + 4z^3w + 6z^2w^2 + 4zw^3 + w^4$

$\vdots$

Donc les coefficients de $(z+w)^n$ sont donnés par la n-ème ligne du triangle de pascal.

Application de la formule de De Moivre: exprimer $\cos(n\alpha)$ et $\sin(n\alpha)$ en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

Par la formule de De Moivre; on a.

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha).$$

Donc $\cos n\alpha = \operatorname{Re}(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$, $\sin n\alpha = \operatorname{Im}(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$.

On peut developper $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$ avec la formule du Binôme de Newton.

$n=2$: $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \underbrace{1}_{\binom{2}{0}}\cdot\cos^2\alpha + \underbrace{2}_{\binom{2}{1}}i\cos\alpha\sin\alpha + \underbrace{1}_{\binom{2}{2}}\cdot i^2\sin^2\alpha =$

$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + i(2\cos\alpha\sin\alpha)$.

$\Rightarrow \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. $(= 2\cos^2\alpha - 1)$, car $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$\sin(2\alpha) = 2\cos\alpha\sin\alpha$.

$n=3$: $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \underbrace{1}_{\binom{3}{0}}\cdot\cos^3\alpha + \underbrace{3}_{\binom{3}{1}}\cos^2\alpha\cdot(i\sin\alpha) + \underbrace{3}_{\binom{3}{2}}\cos\alpha\cdot\{\underbrace{i^2}_{-1}\sin^2\alpha\} + \underbrace{1}_{\binom{3}{3}}\cdot\underbrace{i^3}_{-i}\sin^3\alpha$

$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha + i(3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha)$

$\Rightarrow \cos(3\alpha) = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

$\Rightarrow \sin(3\alpha) = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - \sin^3\alpha$

$n=4$ ...

Grâce à ces formules, on peut exprimer $\tan(n\alpha)$ en fonction de $\tan\alpha$..

$n=2$ $$\tan(2\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \begin{array}{l}\cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} \\ \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha}\end{array} = \frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

$n=3$ $$\tan(3\alpha) = \frac{\sin(3\alpha)}{\cos(3\alpha)} = \frac{3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha}{\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha} \begin{array}{l}\cdot \frac{1}{\cos^3\alpha} \\ \cdot \frac{1}{\cos^3\alpha}\end{array} = \frac{3\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}}{1-3\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$$

$$= \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}.$$

$n=4$ ...

Notons qu'on peut exprimer aussi $\cos(2\alpha)$ et $\sin(2\alpha)$ en fonction de $\tan\alpha$.

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}_{=1}} \begin{array}{l}\cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} \\ \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha}\end{array} = \frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}.$$

$$\sin(2\alpha) = 2\cos\alpha\sin\alpha = \frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} \begin{array}{l}\cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} \\ \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha}\end{array} = \frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

Application des formules d'Euler : linéarisation de $\cos^n x$ et $\sin^n x$

On veut exprimer $\cos^n x$ et $\sin^n x$ en fonction de $\cos kx$ et $\sin kx$, $(k \leq n)$

- Par les formules d'Euler,

$$\cos^n x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n \qquad \sin^n x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n.$$

Puis,
On utilise la formule du binôme de Newton.

$n=2$:

$$\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2ix}+2\underbrace{e^{ix}e^{-ix}}_{\substack{\shortparallel \\ e^{i(x-x)}=e^0=1}}+e^{-2ix}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2ix}+e^{-2ix}+2\right) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}}_{\cos 2x}+1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos 2x+1\right).$$

Rmq : donc $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, qu'on avait déjà obtenu.

$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = \frac{2-1-\cos 2x}{2} = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Mais aussi : $$\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^{2ix}-2\underbrace{e^{ix}e^{-ix}}_{\substack{\shortparallel \\ 1}}+e^{-2ix}\right) = -\frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}}_{\substack{\shortparallel \\ \cos 2x}}-1\right) = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Rmq : on en déduit les "formules de bissection d'un angle".

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad \sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

Si on a le temps

Le $\pm$ dans la formule de bissection vient du fait que si

$$2\alpha = \beta \pmod{2\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2} \pmod{\pi} \text{ ou } \alpha = \begin{cases} \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2}+\pi \end{cases} \pmod{2\pi}$$

~~donc~~ et $\cos\left(\frac{\beta}{2}+\pi\right) = -\cos\frac{\beta}{2}$ $\quad \sin\left(\frac{\beta}{2}+\pi\right) = -\sin\frac{\beta}{2}$.

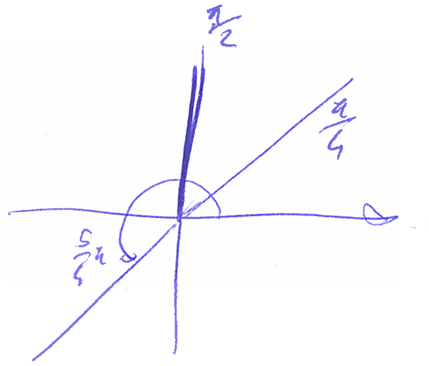
En effet, on a besoin de déterminer l'un des deux angles lequel, il dépend des signes

Exemple : $\cos\frac{\pi}{4} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2}}{2}} = +\sqrt{\frac{1}{2}}$ $\qquad \sin\frac{\pi}{4} = +\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2}}{2}} = +\sqrt{\frac{1}{2}}$.

je prends le +.

$\cos\frac{5}{4}\pi = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\frac{5}{2}\pi}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ $\qquad \sin\frac{5}{4}\pi = -\sqrt{\frac{1}{2}}$.

$\frac{5}{2}\pi = \frac{\pi}{2}+2\pi$ $\qquad$ cette fois-ci je prends le −



$n=3$: $\cos^3\alpha = \left(\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(1\cdot e^{3i\alpha} + 3e^{2i\alpha}e^{-i\alpha} + 3e^{i\alpha}e^{-2i\alpha} + e^{-3i\alpha}\right)$

$\binom{3}{0}$ $\qquad \binom{3}{1}$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{3i\alpha} + 3e^{i\alpha} + 3e^{-i\alpha} + e^{-3i\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\alpha}+e^{-3i\alpha}}{2} + 3\cdot\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha\right).$$

On rétablit $\quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$$\sin^3\alpha = \left(\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\right)^3 = +\frac{1}{8i^3}\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)^3 =$$

$$= -\frac{1}{8i}\left(e^{3i\alpha} - 3e^{2i\alpha}e^{-i\alpha} + 3e^{i\alpha}e^{-2i\alpha} - e^{-3i\alpha}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\alpha}-e^{-3i\alpha}}{2i} - 3\,\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\sin 3\alpha - 3\sin\alpha\right)$$

On rétablit $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

$n=4$ ....

(S'il y a du temps)

Sommes trigonométriques

On veut calculer la somme trigonométrique

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\alpha)$$

Si $\alpha \equiv 0 \pmod{2\pi}$, alors $\cos(k\alpha) = \cos(0) = 1$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, et

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

Supposons $\alpha \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Notons que $\sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\alpha)$ est la partie réelle de la somme

$$S_n := \sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos(k\alpha) + i\sin k\alpha\right).$$

Par la formule d'Euler, $\cos(k\alpha) + i\sin(k\alpha) = e^{ik\alpha}$.
et de De Moivre

Donc $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\alpha} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\alpha}\right)^k$.

S_n est une somme d'une progression géométrique de raison $e^{i\alpha} \neq 1$
car $\alpha \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$

Prop : Soit $z \neq 1$. Alors $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{z^n - 1}{z - 1}$.

Preuve : Soit $S = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$.

Alors $(z-1)S = zS - S = z\sum_{k=0}^{n-1} z^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^k =$

$= \sum_{k=0}^{n-1} z^{\overset{h}{\overset{\shortparallel}{k+1}}} - \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \sum_{h=1}^{n} z^h - \sum_{k=0}^{n-1} z^h = z^n - \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{z^0}$.

Tous les termes se simplifient, sauf $h=n$ et $k=0$ $\square$

Donc $S_n = \frac{e^{in\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - 1}$.

Mais $\frac{e^{in\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - 1} = \frac{e^{in\frac{\alpha}{2}}\left(e^{in\frac{\alpha}{2}} - e^{-in\frac{\alpha}{2}}\right) \cdot \frac{1}{2i}}{e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right) \cdot \frac{1}{2i}} = e^{i(n-1)\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\underbrace{\frac{e^{in\frac{\alpha}{2}} - e^{-in\frac{\alpha}{2}}}{2i}}_{\sin\frac{n\alpha}{2}}}{\underbrace{\frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2i}}_{\sin\frac{\alpha}{2}}}$

$= e^{i(n-1)\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Donc $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\alpha) = \operatorname{Re} S_n = \frac{\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} \operatorname{Re} e^{i(n-1)\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \cos\left(\frac{(n-1)\alpha}{2}\right)$.